HALMAZOKNAK RÉSZHALMAZOKKAL VALÓ BEFEDÉSÉRŐL

Írta: SZÉP JENŐ

A csoportok, félcsoportok és gyűrűk elméletében többen foglalkoztak olyan problémákkal, amelyek a nevezett struktúráknak részstruktúráikkal való befedésével kapcsolatosak. Ezekben a vizsgálatokban többek között olyan befedések is szerepelnek, amely befedések a befedő komponensek sorrendjétől eltekintve egyértelműen vannak meghatározva. Minthogy valamely struktúrának részstruktúrákkal való befedése olyan jellegű „felbontás", amely egész általánosan tetszőleges halmazok esetében is értelemmel bír (valamely halmaznak bizonyos részhalmazokkal való befedése), ezért kézenfekvő a gondolat, hogy a különböző struktúráknál mutatkozó felbontás és egyértelmű felbontás tekintetében egy közös alap után kutassunk.

Az alábbiakban néhány elegendő feltételt mutatunk be halmazoknak bizonyos részhalmazokkal való befedésére és egyértelmű befedésére. A kimondott tételek és a bizonyításuk megértéséhez a halmazelmélet elemeiben való csekély jártasság már elegendő, ezért alkalmas lehet arra, hogy a főiskolai oktatásban szemináriumi, vagy tudományos diákköri anyagként is felhasználható legyen.

Legyen H tetszőleges elemekből álló véges, vagy végtelen halmaz. Ha egy A halmaz minden eleme H-ban van, akkor A-t H részhalmazának nevezzük és így jelöljük: $A \subseteq H$. Az $A \subset H$ viszony valódi tartalmazást jelöl. Két A és B halmaz közös elemeinek (metszetének) halmazának jelölésére az $A \cap B$ ($A \cap B$ lehet üres is), egyesítési halmazának jelölésére pedig az $A \cup B$ jelölést használjuk. Több A_χ halmaz (ahol χ átfut valamely véges, megszámlálható, vagy nem megszámlálható Σ indexhalmazt) egyesítési halmazát így jelöljük: $\bigcup\limits_{\chi \in \Sigma} A_\chi$.

Egy H halmazról akkor mondjuk, hogy az

$$A_\chi \tag{1}$$

(ahol χ átfut valamely Σ indexhalmazt) halmazokkal befedhető, ha H bármely eleme az (1) alatti részhalmazok legalább egyikében megtalálható, azaz fennáll

$$H = \bigcup_{\chi \in \Sigma} A_\chi . \tag{2}$$

Az A_χ részhalmazokat a befedés komponenseinek nevezzük. Ha H nem üres halmaz, akkor a komponensek közül az üres halmazok törölhetők anélkül, hogy a befedés ténye megváltoznék. H befedését valódinak nevezzük, ha a befedés egyik komponense sem egyezik meg H-val, továbbá minimálisnak nevezzük, ha a komponensek közül egyik sem törölhető, azaz a komponensek közül bármelyiket elhagyva a visszamaradók már nem fedik be H-t.

Jelölje A a H részhalmazainak (nem szükségképpen mindegyiknek) valamilyen tulajdonságát. Egy A tulajdonságú halmazt röviden A-részhalmaznak nevezünk. Egy H halmaz (2) befedéséről akkor mondjuk, hogy A-befedés, ha a komponensek mindegyike A-tulajdonságú. Végül egy A halmazról akkor mondjuk, hogy A-irreducibilis, ha nincsen (részhalmazokkal való) valódi A-befedése.

Ezekután tekintsünk egy olyan H halmazt, amelyben bármely két A-részhalmaz közös része is A-részhalmaz (az üres halmazt megállapodásszerűen A-halmaznak tekintjük). Egy ilyen halmazt H_A-val jelölünk.

Érvényes a következő

1. Tétel. Tekintsünk egy H_A halmazt. Ha

$$H_A = \bigcup_{\alpha \in \Sigma} A_\alpha$$

a H_A halmaznak A-irreducibilis komponensekből álló minimális A-befedése, akkor H_A ilyen befedése a komponensek sorrendjétől eltekintve egyértelműen van meghatározva.

Bizonyítás. Tekintsük a H_A halmaznak két felbontását, amelyek eleget tesznek a tétel feltételeinek

$$H_A = \bigcup_{\alpha \in \Sigma} A_\alpha \tag{3}$$

$$H_A = \bigcup_{\chi \in \Sigma'} A'_\chi \tag{4}$$

ahol Σ és Σ' egy-egy indexhalmazt jelöl, amelyet α ill. χ átfut.

Megmutatjuk, hogy a (3) befedés bármelyik komponense megtalálható (4)-ben és viszont.

Tegyük fel ugyanis, hogy A_ϱ $(\varrho \in \Sigma)$ nem komponense (4)-nek. Tekintsük A_ϱ-nak (4) komponenseivel való $A_\varrho \cap A'_\chi = B_\chi$ $(\chi \in \Sigma')$ metszeteit. A B_χ halmazok nyilván befedik A_ϱ-t, továbbá ezek a feltevés szerint A-tulajdonságuak. Fennáll

$$A_\varrho = \bigcup_{\chi \in \Sigma'} B_\chi. \tag{5}$$

Minthogy A_ϱ A-irreducibilis, ezért az (5) befedés nem lehet valódi. Van tehát (5)-ben egy B_σ komponens, amelyre

$$A_\varrho = B_\sigma \subseteq A'_\sigma \quad (\sigma \in \Sigma').$$

Igazoljuk, hogy $A_\varrho = A'_\sigma$. Ugyanis, ha $A_\varrho \subset A'_\sigma$ állana fenn, akkor A'_σ nem lehet része (3) egyik komponensének sem, sőt meg sem egyezhet valamelyikkel, mert ekkor (3) befedés nem lenne minimális (azaz A_ϱ törölhető lenne (3)-ból). Így azonban A'_σ-nak a (3) komponensekkel való metszeteit képezve A'_σ-nak egy valódi befedése kell előálljon, ami ellentmondáshoz vezet, hiszen A'_σ A-irreducibilis. Ezzel igazoltuk, hogy (3) minden komponense megtalálható (4) komponensei között. Hasonlóan mutatható meg, hogy (4) bármelyik komponense megtalálható (3) komponensei között. Ezzel az 1. tételt bebizonyítottuk.

2. *Tétel.* Ha egy H_A halmaznak van minimális A-befedése:

$$H_A = \bigcup_{\chi \in \Sigma} A_\chi \tag{6}$$

továbbá ha (6)-ban létezik olyan $A_\varrho (\varrho \in \Sigma)$ komponens, hogy

$$S = \bigcup_{\chi, \zeta \in \Sigma} (B_\chi \cap A_\zeta) \subseteq A_\varrho \qquad (\chi \neq \zeta) \tag{7}$$

akkor H_A minden olyan T részhalmazának is van minimális (legfeljebb egy komponenstől eltekintve) A-befedése, amelyre $T \subseteq\!\!|\!= A_\chi$ $(\chi \in \Sigma)$ fennáll.

Bizonyítás. Tekintsük a T részhalmaznak a (6) komponensekkel való metszeteit. Ezek T-nek egy A-befedését adják.

$$T = \bigcup_{\chi \in \Sigma} B_\chi \qquad (B_\chi = T \cap A_\chi). \tag{8}$$

Megmutatjuk, hogy (8) befedése minimálissá tehető. Ehhez először azt mutatjuk meg, hogy (8) minden törölhető komponense része S-nek. Ugyanis ha $B_\alpha (\alpha \in \Sigma)$ (8)-ból törölhető, ez azt jelenti, hogy B_α (6)-nak legalább két komponensében megtalálható és így $B_\alpha \subseteq S$. Minthogy a (8)-ból törölhető B_σ $(\sigma \in \Sigma' \subseteq \Sigma)$ A-halmazok egyesítési halmazára fennáll $\bigcup_{\sigma \in \Sigma'} B_\sigma \subseteq S$ ezért (8)-ban a nem törölhető halmazokhoz legfeljebb az $\bigcup_{\sigma \in \Sigma'} B_\sigma$ halmaz hozzávételével. T-nek egy minimális befedését nyerjük, amelyben legfeljebb $\bigcup_{\sigma \in \Sigma'} B_\sigma$ nem A-részhalmaz. Ezzel a 2. tételt is igazoltuk.

Legyen H_A egy halmaz, amelynek van olyan

$$H_A = \bigcup_{\chi \in \Sigma} A_\chi$$

befedése, amelyre $A_\xi \cap A_\zeta = D$ fennáll bármely két $\xi \neq \zeta$ indexre. $(\xi, \zeta \in \Sigma)$. A D halmaz speciálisan lehet az üres halmaz is. Az ilyen befedést D magú A-befedésnek nevezzük. Ha a H_A halmaz valamely A részhalmazának nincsen D magú valódi A-befedése, akkor A-t a D magra nézve A-irreducibilisnek nevezzük. Az 1. tétel bizonyításában követett gondolatmenettel igazolható a következő.

3. *Tétel.* Ha egy H_A halmaznak van minimális D magú A-befedése $(D \subset H_A)$ és a befedés valamennyi komponense a D magra nézve A-irreducibilis, akkor a befedés a komponensek sorrendjétől eltekintve egyértelműen van meghatározva, azaz H_A-nak nincsen két különböző D magú minimális A-befedése.

4. *Tétel.* Legyen egy H_A halmaznak

$$H_A = \bigcup_{\chi \in \Sigma} A_\chi \tag{9}$$

egy minimális A-befedése és

$$H_A = \bigcup_{\alpha \in \Sigma'} A'_\alpha \tag{10}$$

egy A-irreducibilis A-befedése. Ekkor Σ' számossága nagyobb vagy egyenlő mint Σ számossága.

Bizonyítása. Tekintsük (10) egy tetszőleges A'_ϱ ($\varrho \in \Sigma'$) komponensének a (9) komponensekkel való metszeteit. Ezek lefedik A'_ϱ-t. Minthogy A'_ϱ A-irreducibilis komponens, ezért a befedés nem lehet valódi és így A'_ϱ része (9) valamelyik komponensének. Így (10) minden egyes komponense megtalálható (9) valamelyik komponensében. (9)-nek viszont nem lehet olyan komponense, amelyik (10) egyetlen komponensét sem tartalmazza, ugyanis ez akkor törölhető lenne (9)-ből, ami ellentmond annak, hogy (9) minimális befedés. Ezzel állításunkat igazoltuk.

A 4. tétel következménye. Legyen (9) és (10) véges sok komponensből álló befedés. (9)-ben a komponensek száma legyen n és (10)-ben m. A 4. tétel szerint $m \geqq n$. Ha $m = n$ áll fenn, akkor a (10) befedés egyszersmind minimális. Ugyanis ha (10)-ből az egyik komponens elhagyható lenne, akkor $m-1>n$ miatt ellentmondáshoz jutnánk.

IRODALOM

[1] *A. H. Clifford,:* Semigroups admitting relative inverses, Annals of Math. 42 (1941), 1037—1049.
[2] *P. G. Kontorovic,:* Sur la representation d'un groupe fini sous la forme d'une somme direkte de sousgroupes I, II, Mat. Sbornik 5(47), (1939), 289—295. és 7(49). (1940), 27—32.
[3] *P. G. Kontorovic,:* Sur les groupes normalelement decomposables I, Mat. Sbornik 8(50), (1940), 423—436.
[4] *P.G. Kontorovic,:* Sur les groupes a base de partition I—IV, Mat. Sbornik 12(54), (1943), 56—70; 19(61), (1946), 287—308; 22(64), (1948,) 79—88; 26(68), (1950), 311—320.
[5] *P. G. Kontorovic,:* Invariantly covered groups II, Mat. Sbornik 28(70), (1951), 79—88.
[6] *Kovács L.* és *Szép J.:* Über die Bedeckung von Ringen, Publicationes Math. (sajtó alatt).
[7] *G. A. Miller,:* Groups in which all the operators are contained in a series of subgroups such that any two have only identity in common, Bulletin Amer. Soc. 12(1905—1906), 446—449.
[8] *B. H. Neumann,:* Groups covered by finitely many cosets, Publicationes Math. 3(1954), 227—242.
[9] *B. H. Neumann,:* Groups covered by permutable subsets, Journal London Math. Soc. 29(1954), 236—248.
[10] *St. Schwarz,:* On the structure of simple semigroups without zero, Czechoslovak Math. J. I(76), (1951), 41—53.
[11] *St. Schwarz,:* On semigroups having a kernel Czechoslovak Math. J. I(76), (1951), 229—263.
[12] *St. Schwarz,:* Contribution to the theory of torsion semigroups Czechoslovak Math. J. 3(78), (1953), 7—21.
[13] *St. Schwarz,:* On maximal ideals in the theory of semigroups, I, II. Czechoslovak Math. 3(78), (1953), 139—153; 365—383.
[14] *St. Schwarz,:* The theory of charakters of finite commutative semigroups, Czechoslovak Math. J. 4(79), (1954), 219—247.
[15] *St. Schwarz,:* Topological semigroups with one-sided units, Czechoslovak Math. J. 5(80), (1955), 153—163.
[16] *M. Suzuki.:* On the finite group with a complete partition, J. Math. Soc. Japan, 2(1950), 165—185.
[17] *Szép J.:* Zur Theorie der Halbgruppen, Publicationes Math. 4(1956), 344—346.

[18] *M. Takahasi*, On partitions of free products of groups, Osaka Math. J. 1(1949), 49—51.
[19] *J. W. Young,*: On the partitions of a group and the resulting classification, Bulletin Amer. Soc. 33(1927), 453—461.

О ПОКРЫТИИ МНОЖЕСТВ ПОДМНОЖЕСТВАМИ

Е. Сеп

В случае специальных алгебраических систем (групп, полугрупп, колец) были проведены другими исследования относительно покрытия упомянутых систем подсистемами. Эти работы побудили автора к поискам за теоретико-множественные теоремы покрытия во всей общности.

Мы говорим, что множество H покрывается подмножествами

$$A_\chi \tag{1}$$

где χ пробегает некоторое множество индексов, если любой элемент из H содержится хотя бы в одном из подмножеств в (1), т. е. если имеет место

$$H=\bigcup_{\chi\in\Sigma} A_\chi . \tag{2}$$

Подмножества A_χ будем называть с о с т а в л я ю щ и м и покрытия. Покрытие назовем и с т и н н ы м, если все составляющие отличны от H, и м и н и м а л ь н ы м, если ни одна из составляющих не может быть опущена.

Обозначим через А какое-нибудь свойство подмножеств множества H (не об'язательно всех). Множество, обладающее свойством А, назовем коротко А-м н о ж е с т в о м. О покрытии (2) множества H будем говорить, что оно А-покрытие, если все его составляющие — А-множества. Наконец, множество H назовем А-н е п р и в о д и м ы м, если оно не имееет истинного А-покрытия.

Рассмотрим после этого такое множество H, в котором пересечение любых двух А-подмножеств является тоже А-п о д множеством (пустое множество условимся считать А-множеством). Такое множество обозначается через H_{A}.

Имеют место следующие теоремы:

Т е о р е м а 1. Е с л и

$$H_{\mathsf{A}}=\bigcup_{\alpha\in\Sigma} A_\alpha$$

м и н и м а л ь н о е А-п о к р ы т и е м н о ж е с т в а H_{A}, с о с т о я щ е е из А-н е п р и в о д и м ы х с о с т а в л я ю щ и х, т о т а к о е п о к р ы т и е м н о ж е с т в а H_{A} о п р е д е л е н о с т о ч н о с т ь ю п о р я д к а с о с т а в л я ю щ и х о д н о з н а ч н о.

Т е о р е м а 2. Е с л и м н о ж е с т в о H_{A} и м е е т м и н и м а л ь н о е А-п о к р ы т и е

$$H_{\mathsf{A}}=\bigcup_{\chi\in\Sigma} A_\chi \tag{3}$$

и в (3) и м е е т с я т а к а я с о с т а в л я ю щ а я A_ϱ, д л я к о т о р о й и м е е т м е с т о

$$S=\bigcup_{\chi\zeta\in\Sigma}(A_\chi\cap A_\zeta)\subseteq A_\varrho \qquad (\chi\neq\zeta) \tag{4}$$

т о в с я к о е т а к о е п о д м н о ж е с т в о T м н о ж е с т в а H_{A}, д л я к о т о р о г о $T \subseteq\!|\!\equiv A\chi$ тоже имеет минимальное А-покрытие (с точностью до одной составляющей).

Т е о р е м а 3. Е с л и м н о ж е с т в о H_{A} и м е е т т а к о е м и н и м а л ь н о е п о к р ы т и е

$$H_{\mathsf{A}}=\bigcup_{\chi\in\Sigma} A_\chi$$

д л я к о т о р о г о $A_\chi\cap A_\zeta=D\,(\chi\neq\zeta)$, н о н и о о д н а и з с о с т а в л я ю щ и х н е о б л а д а е т т а к и м с в о й с т в о м, т о п о к р ы т и е о д н о з н а ч н о с т о ч н о с т ь ю п о р я д к а с о с т а в л я ю щ и х.

Теорема 4. Пусть

$$H_{\mathsf{A}} = \bigcup_{\chi \in \Sigma} A_\chi$$

является минимальным, а

$$H_{\mathsf{A}} = \bigcup_{\alpha \in \Sigma'} A'_\alpha$$

неприводимым A-покрытием множества H_{A}. Тогда мощность Σ' больше или равна мощности Σ.

Следствие из теоремы 4. Если числа составляющих в обоих покрытиях конечны и равны друг другу, то покрытие $H_{\mathsf{A}} = \bigcup_{\alpha \in \Sigma'} A'_\alpha$ является также минимальным.

ÜBER DIE BEDECKUNG VON MENGEN MIT UNTERMENGEN

von

J. SZÉP

Im Fall von speziellen algebraischen Strukturen hatten sich mehrere Verfasser mit gewissen Bedeckungsproblemen beschäftigt. Diese Probleme hatten uns den Grund geboten nach ganz allgemeinen mengentheoretischen Bedeckungssätzen zu forschen.

Eine Menge H ist mit den Untermengen

$$A_\chi \tag{1}$$

dan bedeckbar (χ durchläuft irgendwelche Indizesmenge Σ), wenn jedes Element von H in einem von (1) vorkommt, das heisst gilt

$$H = \bigcup_{\chi \in \Sigma} A_\alpha \tag{2}$$

Die Untermengen A_χ sind die Komponenten der Bedeckung. Die Bedeckung (2) von H ist eine echte Bedeckung, wenn keine Komponente von (2) mit H gleich ist, ausserdem ist eine minimale Bedeckung, wenn man keine Komponente in (2) streichen kann.

Es bezeichne A irgendwelche Eigenschaft der Untermengen (nicht notwendigerweise jeder Untermenge) von H. Eine Menge mit A-Eigenschaft ist eine A-Menge. Die Bedeckung (2) ist eine A-Bedeckung, wenn jede Komponente die A-Eigenschaft hat. Endlich nennt man eine Menge A-irreduzibel, wenn sie keine echte A-Bedeckung hat.

Es bezeichne H_{A} eine Menge, in der der Durchschnitt von zwei A-Untermengen wieder eine A-Menge ist.

Es gelten die folgenden Sätze:

Satz 1. Ist

$$H_{\mathsf{A}} = \bigcup_{\alpha \in \Sigma} A_\alpha$$

eine minimale A-Bedeckung von H_{A} mit A-irreduziblen Komponenten, dann ist die Bedeckung (von der Reihenfolge der Komponenten abgesehen) eindeutig bestimmt.

Satz 2. Ist

$$H_{\mathsf{A}} = \bigcup_{\chi \in \Sigma} A_\chi$$

eine minimale A-Bedeckung von H_{A}, existiert ausserdem in (3) eine Komponente A_ϱ ($\varrho \in \Sigma$) mit

$$S = \bigcup_{\chi, \zeta \in \Sigma} (A_\chi \cap A_\zeta) \subseteq A_\varrho \qquad (\chi \neq \zeta) \tag{4}$$

so hat jede Untermenge T von H_A eine minimale (höchstens von einer einzigen Komponente abgesehen) A-Bedeckung, für die $T \subseteq A_\chi$ gilt.

Satz 3. Hat H_A eine minimale A-Bedeckung

$$H_A = \bigcup_{\chi \in \Sigma} A_\chi$$

für die $A_\chi \cap A_\xi = D$, $(\chi \neq \zeta)$ für jede χ, ζ gilt, aber keine von der Komponenten eine solche Eigenschaft hat, dann ist die Bedeckung (von der Reihenfolge der Komponenten abgesehen) eindeutig bestimmt.

Satz 4. Es sei

$$H_A = \bigcup_{\chi \in \Sigma} A_\chi$$

eine minimale A-Bedeckung von H_A, und

$$H_A = \bigcup_{\alpha \in \Sigma'} A'_\alpha$$

eine A-irreduzible A-Bedeckung von H_A. Dann ist die Mächtigkeit von Σ' grösser (oder gleich) als die Mächtigkeit von Σ.

Ein Korollar des Satzes 4. Ist die Anzahl der Komponenten endlich und gleich miteinander, dann ist die Bedeckung $H_A = \bigcup_{\alpha \in \Sigma'} A'_\alpha$ zugleich minimal.